

Тестовые задачи по курсу "Электродинамика".

1. Заряд  $q$  равномерно распределен по поверхности шара радиуса  $R$ . Записать выражение для поверхностной и объемной плотности заряда.

Ответ:

$$\sigma_S = \frac{q}{4\pi R^2}, \quad \rho = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R).$$

2. Пусть  $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = (x/r, y/r, z/r) = (\sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \cos \vartheta)$  – вектор единичной длины, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти усредненные значения произведений  $\overline{n_i n_j}$  и  $\overline{n_i n_j n_k n_l}$ , где  $n_i$  – проекция вектора  $\vec{n}$  на ось  $i$ .

Ответ:

$$\overline{n_i n_j} = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \overline{n_i n_j n_k n_l} = \frac{1}{15} \{ \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \}.$$

3. Найти распределение заряда и полный заряд системы, потенциал которой равен  $\varphi(r) = (A/r) \cdot \exp(-r/b)$ .

Ответ:

$$\rho(r) = A \delta(\vec{r}) - \frac{A}{4\pi b^2 r} \exp[-\frac{r}{b}], \quad Q = 0.$$

4. Найти потенциал системы из трех заряженных частиц (до квадрупольного приближения, включительно) на больших расстояниях  $r \gg a \sim b$  от нее. Первая частица имеет заряд  $2q$  и расположена в точке  $\{a, 0, 0\}$ , вторая частица имеет заряд  $q$  и расположена в точке  $\{0, b, 0\}$ , третья частица имеет заряд  $-3q$  и расположена в точке  $\{-a, 0, 0\}$ .

Ответ:

$$\varphi = \frac{q(5ax + by)}{r^3} - \frac{q}{2r^5} [(2a^2 + b^2)x^2 - (a^2 + 2b^2)y^2 - (a^2 - b^2)z^2].$$

5. Два коаксиальных равномерно заряженных кольца из тонкой круглой проволоки, с радиусами  $a$  и  $b$ , зарядами  $+q$  и  $-q$ , расположены в одной плоскости. Найти скалярный потенциал  $\varphi$  на больших расстояниях  $r \gg b > a$  от такой системы зарядов.

Ответ:

$$\varphi = \frac{q(b^2 - a^2)}{4r^3} [3 \cos^2 \theta - 1].$$

6. Найти энергию взаимодействия двух точечных диполей  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , расположенных на большом расстоянии друг от друга.

Ответ:

$$U_{int} = \frac{(\vec{p}_1 \vec{p}_2) r^2 - 3(\vec{p}_1 \vec{r})(\vec{p}_2 \vec{r})}{r^5}.$$

7. Найти векторный потенциал и магнитное поле шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объему зарядом  $q$  и вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр, на больших расстояниях  $r$ ,  $r \gg R$ .

Ответ:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3}, \quad \vec{H}_1 = \frac{3(\vec{m} \vec{r}) \vec{r} - \vec{m} r^2}{r^5}, \quad \vec{m} = \frac{q R^2}{5c} \vec{\omega}.$$

8. Заряд  $e$  совершает гармонические колебания вдоль оси  $Z$  с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ , ( $a \ll c/\omega$ ). Найти полную интенсивность и угловое распределение излучения, усредненные по периоду. Исследовать поляризацию.

Ответ:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad I = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{3c^3}, \quad \text{поляризация линейная.}$$

9. Заряд  $e$  движется с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R$ . Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения.

Ответ:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 R^2 \omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta), \quad I = \frac{2e^2 R^2 \omega^4}{3c^3}.$$

10. Электрический диполь  $\vec{p}$  гармонически колеблется вдоль своей оси (оставаясь параллельным самому себе) с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$ . Найти частоту излучения и энергию, излучаемую за период.

Ответ: Частота излучения равна  $\omega$ ,

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{2\pi a^2 \vec{p}^2 \omega^5}{15c^5}.$$

11. Нерелятивистская частица с зарядом  $e$ , массой  $m$  рассеивается в кулоновском поле бесконечно тяжелого силового центра (заряд  $Q$ ) с прицельным расстоянием  $a$ , обеспечивающим малость отклонения,  $mv_0^2 \gg eQ/a$  (т. наз. периферическое рассеяние). Найти полную энергию, излученную во время соударения, если скорость частицы на бесконечности равна  $v_0$ .

Ответ:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\pi e^4 Q^2}{3m^2 c^3 a^3 v_0}.$$

12. Нерелятивистская частица с зарядом  $e$ , массой  $m$  движется в однородном постоянном магнитном поле  $\vec{H}$ . Найти время, в течение которого энергия частицы уменьшается в 10 раз вследствие излучения.

Ответ:

$$t = \frac{3m^3 c^5}{4e^4 H^2} \ln 10.$$

13. Учитывая силу радиационного трения, найти силу давления света на свободный нерелятивистский электрон.

Ответ:

$$\vec{F} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\vec{\sigma}}{c}, \quad \vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}].$$

14. Покоящийся атом испускает фотон частоты  $\omega$ . В каких пределах изменяется частота излучения этого атома, если он движется со скоростью  $V$ ?

Ответ:

$$\omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \leq \omega \leq \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

15. Найти потенциалы  $\varphi, \vec{A}$  точечного заряда  $e$ , движущегося вдоль оси  $z$  равномерно со скоростью  $V$ .

Ответ:

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 - \beta^2) + (z - Vt)^2}}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{V}}{c}\varphi.$$

16. Учитывая преобразования Лоренца и используя закон преобразования тензора второго ранга, найти формулы преобразования компонент  $E$  и  $H$  при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ .

Ответ:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & H'_x &= H_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & H'_y &= \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & H'_z &= \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

17. Обобщить закон преобразования векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при преобразовании Лоренца на случай произвольного направления вектора относительной скорости  $\vec{V}$ .

Ответ:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{H}'_{\parallel} &= \vec{H}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{\beta}\vec{H}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \vec{H}'_{\perp} &= \frac{\vec{H}_{\perp} - [\vec{\beta}\vec{E}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

18. В лабораторной системе координат угол между напряженностями полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  равен  $\varphi$ . Найти систему координат, в которой они параллельны. Всегда ли задача имеет решение? Единственно ли оно?

Ответ:

$$\vec{V} = c[\vec{E}\vec{H}] \cdot \frac{H^2 + E^2 - \sqrt{(H^2 - E^2)^2 + 4(\vec{E}\vec{H})^2}}{2[\vec{E}\vec{H}]^2}.$$

19. Электрон обладает спиновым моментом количества движения  $s$ , ( $s = \hbar/2$ ) и связанным с ним магнитным моментом  $\mu = es/(mc)$ . Оценить энергию взаимодействия магнитного момента электрона в атоме водорода с кулоновским полем ядра.

Ответ:

$$U_{int} \sim \frac{e^2}{m^2 c^2 r^3} (\vec{L}\vec{s}), \quad \vec{L} = m[\vec{r}\vec{v}].$$

20. Частица с массой  $m_1$  и скоростью  $v_1$  поглощается частицей массы  $m_2$ , первоначально покоившейся. Найти массу  $M$  и скорость  $V$  образовавшейся частицы.

Ответ:

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \quad M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

21. Квант света с частотой  $\omega_0$  рассеивается на покоящемся свободном электроне. Найти зависимость частоты  $\omega$  рассеянного фотона от угла рассеяния  $\theta$ .

Ответ:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{\hbar \omega_0}{m c^2} (1 - \cos \theta)}.$$

22. Найти пороговую энергию фоторождения  $\pi^0$ -мезона на нуклоне:  $n + \gamma \rightarrow n + \pi^0$ . Массы покоя нуклона  $M$  и  $\pi^0$ -мезона  $m$  известны.

Ответ:

$$\mathcal{E}_\gamma = \hbar \omega = m c^2 \left( 1 + \frac{m}{2M} \right).$$

23. Найти массу системы, состоящей из двух фотонов одинаковой частоты  $\omega$ , если угол между их волновыми векторами равен  $\theta$ .

Ответ:

$$M = 2 \frac{\hbar \omega}{c^2} \sin \theta / 2.$$

24. Релятивистская частица с зарядом  $e$  и массой  $m$  движется с релятивистской скоростью в однородном электрическом поле  $\vec{E}$ . При  $t = 0$  частица находилась в начале координат и имела импульс  $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$ . Найти закон движения частицы - явную зависимость  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{v}(t)$ .

Ответ:

$$\vec{v} = \frac{c^2 (e \vec{E} t + \vec{p}_0)}{\sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4 + c^2 \vec{E}^2 t^2}},$$

$$\vec{r} = \left\{ \frac{1}{e E} \left( \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4 + c^2 \vec{E}^2 t^2} - 1 \right), \frac{c p_0}{e E} \operatorname{Arsh} \left( \frac{c e E t}{\sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}} \right), 0 \right\}.$$

25. Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $a$  от центра заземленного проводящего шара радиуса  $R$ . Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов и полный заряд, индуцированный на шаре, энергию и силу взаимодействия.

Ответ:

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 r^2 / R^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}},$$

$$\sigma_S = -\frac{q(a^2 - R^2)}{4\pi R(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}}, \quad Q = -qR/a,$$

$$U_{int} = -\frac{q^2 R}{2(a^2 - R^2)}, \quad F = -\frac{q^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2}.$$

26. Равномерно заряженная тонкая нить (линейная плотность заряда  $\kappa$ ) расположена на расстоянии  $a$  от оси проводящего заземленного цилиндра радиуса  $R$ ,  $a > R$ . Найти потенциал результирующего электрического поля и плотность поверхностных зарядов на цилиндре.

Ответ:

$$\varphi = \kappa \ln \left\{ \frac{(r^2 + R^4/a^2 + R^2 - 2R^2 r \cos \theta/a)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)} \right\} + 2\kappa \ln \frac{a}{R},$$

$$\sigma_S = \frac{\kappa(R^2 - a^2)}{2\pi R(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)}.$$

27. Проводящий шар радиуса  $R$  разрезан на два полушария, соединенные между собой, и помещен во внешнее однородное поле  $E_0$ , направленное перпендикулярно плоскости разреза. Найти силу, действующую на каждое из полушарий.

Ответ:

$$F = \frac{9}{16} R^2 E_0^2.$$

28. Заряд  $q$  расположен на расстоянии  $a$  от плоской границы раздела двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Найти потенциал и силу действующую на заряд.

Ответ:

$$\varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + \frac{q(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)r_2}, \quad (npu \ z \geq 0),$$

$$\varphi_2 = \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r_1}, \quad (npu \ z \leq 0), \quad \vec{r}_1 = \{x, y, z - a\}, \quad \vec{r}_2 = \{x, y, z + a\}$$

$$F = -\frac{q^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{4a^2 \epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

29. Найти высоту поднятия жидкости с плотностью массы  $\rho_m$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  между пластинами плоского конденсатора, опущенными в жидкость, если между ними поддерживается постоянная разность потенциалов  $V$ , а расстояние между пластинами равно  $d$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

Ответ:

$$H = \frac{V^2(\varepsilon - 1)}{8\pi d^2 \rho_m g}.$$

30. Диэлектрический шар радиуса  $a$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  помещен в однородное внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Найти потенциал.

Ответ:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{(\varepsilon + 2)}(\vec{E}_0 \vec{r}), \quad \varphi_2 = -(\vec{E}_0 \vec{r}) + \frac{(\vec{P} \vec{r})}{r^3}, \quad \vec{P} = \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)} a^3 \vec{E}_0.$$

31. В плохо проводящую среду (например, электролит) опущены хорошо проводящие стержни. Известны потенциал каждого стержня  $U_k$  и полный стекающий с него ток  $J_k$ . Найти джоулево тепло, выделяющееся за единицу времени.

Ответ:

$$Q = \sum_{k=1}^N J_k U_k.$$

32. Найти взаимную индукцию тонких коаксиальных колец с радиусами  $a$  и  $b$ , лежащих в параллельных плоскостях. Расстояние между плоскостями  $h$ . Рассмотреть случай  $h \gg a \sim b \gg r$ , где  $r$  - толщина провода.

Ответ:

$$L = \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{h^3}.$$

33. Проводящий шар (радиуса  $R$ , проводимостью  $\sigma$ ) помещен во внешнее однородное магнитное поле  $H = H_0 \cos(\omega t)$ . Найти магнитный момент шара  $\vec{\mu}$  и интенсивность излучения  $I$ , если  $\delta \ll R \ll c/\omega$ , где  $\delta$  - толщина скин-слоя.

Ответ:

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2} R^3 \vec{H}, \quad I = \frac{\omega^4 R^6 H^2}{6c^3}.$$

34. Проводящий шар (радиуса  $R$ , проводимостью  $\sigma$ ) помещен во внешнее однородное магнитное поле  $H_0 \cos(\omega t)$ . Найти магнитный момент шара  $\vec{\mu}$  и интенсивность излучения  $I$ , если  $R \ll \delta \ll c/\omega$ , где  $\delta$  - толщина скин-слоя.

Ответ:

$$\vec{\mu} = \frac{2\pi\sigma\omega R^5}{15c^2} \vec{H}_0 \sin \omega t, \quad I = \frac{\omega^4 \vec{\mu}^2}{3c^3}.$$

35. Проводящий цилиндр радиуса  $R$ , высоты  $h$  вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$  в однородном постоянном магнитном поле  $\vec{B} \perp \vec{\omega}$ . Оценить момент сил (при  $h \gg R$ ,  $\delta \gg R$ ), необходимых для поддержания равномерного вращения.

Ответ:

$$M = -\frac{\pi\sigma\omega B^2 R^4 h}{8c^2}.$$

36. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти действительную часть  $\epsilon'(\omega)$  диэлектрической проницаемости по ее мнимой части

$$\epsilon''(\omega) = (\epsilon_0 - 1) \cdot \frac{\omega\nu}{\omega^2 + \nu^2},$$

где  $\epsilon_0$  и  $\nu$  – постоянные параметры.

Ответ:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + (\epsilon_0 - 1) \cdot \frac{\nu^2}{\omega^2 + \nu^2}.$$