Задачи по курсам высшей математики и математической физики

Математический анализ

1. Найти предел последовательности:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{100n}{n^2+2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5^n}{10\cdot 5^n+2}; \qquad \text{в) } \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n).$$

2. Найти предел функции:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}; \quad \text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^4+1)}.$$

3. Найти производную функции:

$$\text{а) } y=\sqrt{x+\sqrt{x}}; \quad \text{б) } y=\ln\sin x; \quad \text{в) } y=\sin(\ln x); \quad \text{г) } y=\operatorname{arctg} e^x; \quad \text{д) } y=x^{\cos x};$$

$$\text{е) } y=\cos x^{\operatorname{tg} x}.$$

4. Изобразить траекторию точки, движение которой на плоскости (x, y) задано уравнениями:

$$\text{а) } x=t,\ \ y=t^2,\ \ -1\le t<\infty; \quad \text{б) } x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,\ \ 0\le t<\infty;$$

$$\text{в) } x=e^t,\ \ y=e^{2t},\ \ -\infty<t<\infty.$$

Найти абсолютную величину скорости точки в момент $t=0$.

5. Найти дифференциал функции:

$$\text{а) } y=\sin^2 x \quad \text{в точке } x=\frac{\pi}{4}; \quad \text{б) } y=\arcsin x \quad \text{в точке } x=\frac{1}{2}.$$

6. Найти производную n–го порядка функции:

$$\text{а) } y=\cos 2x; \quad \text{б) } y=x^{10}; \quad \text{в) } y=2^x \quad \text{для} \quad \text{n=10}; \quad \text{г) } y=xe^x; \quad \text{д) } y=x^2\sin x;$$

$$\text{е) } y=\sin x\sin 3x.$$

7. Найти интеграл:

$$\text{а) } \int\frac{\sqrt{x}+1}{x}dx; \ \text{б) } \int\frac{dx}{(2x+3)^{10}}; \ \text{в) } \int 2^x\cdot 3^x dx; \ \text{г) } \int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}; \ \text{д) } \int\sin(3x-1)dx;$$

$$\text{е) } \int\frac{xdx}{1+x^2}; \ \text{ж) } \int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}; \ \text{з) } \int\sqrt[3]{1+5x}\,dx; \ \text{и) } \int xe^{2x}dx; \ \text{к) } \int x\sin x dx;$$

$$\text{л) } \int\frac{dx}{x(x+1)}; \ \text{м) } \int\frac{dx}{x^2-5x+6}; \ \text{н) } \int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}.$$

8. Вычислить определенный интеграл:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} x\cos x dx; \quad \text{б) } \int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}; \quad \text{в) } \int_{-1}^1 |x|dx; \quad \text{г) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin|x|dx.$$

9. Найти длину дуги кривой, заданной уравнениями:

а) $y = x^{3/2},\ \ 0 \le x \le 4;$ б) $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$

в) $x = e^t,\ \ y = \frac{2}{3}\, e^{(3/2)t},\ \ 0 \le t \le \ln 3.$

10. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми:

а) $y = x^2,\ \ x + y = 2;$ б) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением заданных кривых:

а) $y = a\sqrt{x}\ \ (0 \le x \le 1),\ \ x = 1$ вокруг оси Ox;

б) $y = \sin x\ \ (0 \le x \le \pi)$ вокруг оси Ox;

в) $y = x^2\ \ (0 \le x \le 1),\ \ y = 1$ вокруг оси Oy.

12. Найти координаты центра тяжести:

а) дуги окружности $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

б) однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(a > 0)$;

в) однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$.

13. Построить график функции:

а) $y = (x+1)x^2;$ б) $y = \dfrac{1}{1 - x^2};$ в) $y = xe^{-x^2}.$

14. Найти частные производные первого и второго порядков функции:

а) $u = x^2 + y^3 + \sin xy;$ б) $u = xe^y + ye^x;$ в) $u = x^y.$

15. Найти точки локального экстремума функции:

а) $u = x^2 - xy + y^2;$ б) $u = x^2 - xy - y^2;$ в) $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1.$

16. Найти точки условного экстремума функции:

а) $u = x^2 + y^2$ при условии связи $x + y = 1;$

б) $u = x + y$ при условии связи $x^2 + y^2 = 1.$

17. Преобразовать дифференциальное уравнение:

а)

$$x^2y'' + xy' + y = 0,$$

введя новую независимую переменную t по формуле $x = e^t$;

б)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

введя новые независимые переменные u и v по формулам $u = x$, $v = \dfrac{y}{x}$.

18. Вычислить двойной интеграл:

а) $\iint\limits_G x dx dy$, где G — область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$;

б) $\iint\limits_G x^2 dx dy$, где G — круг: $x^2 + y^2 \leq 1$.

19. Вычислить тройной интеграл:

а) $\iiint\limits_T (x+y+z) dx dy dz$, где T — область, ограниченная поверхностями $x+y+z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

б) $\iiint\limits_T x^2 dx dy dz$, где T — шар: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

20. Вычислить криволинейный интеграл первого рода:

а) $\int\limits_L (x + y) dl$, где L — отрезок, соединяющий точки $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$;

б) $\int\limits_L y^2 dl$, где L — дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

21. Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

а) $\int\limits_{OA} x dy - y dx$, где OA — отрезок, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$;

б) $\oint\limits_L x dx + y dy$, где L — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

22. Вычислить площадь:

а) части поверхности $z = x + 2y$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$;

б) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = b^2$, если $0 < b < a$.

23. Вычислить поток вектора:

а) $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$, через внешнюю сторону поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, через внешнюю сторону части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$.

24. Вычислить работу векторного поля:

а) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ по окружности $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \ x = 2y\}$, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $M(2R, 0, 0)$;

б) $\vec{F} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ по эллипсу $\{x^2 + y^2 = a^2, \ \ z = x + y\}$, пробегаемому против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси z.

25. Исследовать на сходимость ряд:

$$\text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}; \qquad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{10}{n^2-1}.$$

26. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\text{а)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}; \qquad \text{б)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}; \qquad \text{в)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

27. Разложить периодическую функцию в ряд Фурье:

$$\text{а)} \ f(x) = \cos x \sin 3x; \qquad \text{б)} \ f(x) = \sin^3 x.$$

Аналитическая геометрия

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ параллельно прямой $x + y = 1$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ перпендикулярно к прямой $x + y = 1$.

3. Найти расстояние между прямыми $x - y + 1 = 0$ и $2x - 2y - 5 = 0$.

4. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси, 2) фокусы, 3) эксцентриситет, 4) уравнения директрис.

5. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) ее полуоси, 2) фокусы, 3) эксцентриситет, 4) уравнения асимптот, 5) уравнения директрис.

6. Даны вершины треугольника $A(3,2,-3)$, $B(5,1,-1)$ и $C(1,-2,1)$. Найти его угол при вершине B.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3,-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-1,-1)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{4}$.

9. Найти расстояние от точки $M(1,-1,2)$ до плоскости $2x - 2y + z = 3$.

10. Найти расстояние от точки $M(1,-1,-2)$ до прямой $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$.

11. Через точки $A(2,-1,3)$ и $B(0,2,-1)$ проведена прямая. Найти точку пересечения этой прямой с плоскостью $3x - y + z = 0$.

12. Может ли вектор составлять с осью Ox угол $150°$, а с осью Oz угол $30°$?

13. Найти сумму скалярных произведений $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}) + (\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{a}})$, если $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{0}}$, и векторы $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ — единичные.

Линейная алгебра

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

4. Используя операции над матрицами, решить уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти фундаментальную совокупность решений (базис в пространстве решений) для системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

8. Найти собственные значения и все собственные векторы матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $x_1^2 + x_2x_3$ к каноническому виду.

10. В линейной оболочке $L = L(\sin x, \cos x)$ скалярное произведение элементов

$$f_1 = a_1 \sin x + b_1 \cos x \quad \text{и} \quad f_2 = a_2 \sin x + b_2 \cos x$$

введено формулой

$$(f_1, f_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

а) Доказать, что элементы $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos x$ и $e_2 = \sin x - \cos x$ образуют ортонормированный базис в линейном пространстве L.

б) Найти матрицу оператора дифференцирования $\widehat{D}$ в базисе e_1, e_2.

в) Найти матрицу сопряженного оператора $\widehat{D}^*$ в базисе e_1, e_2.

11. Пусть G — множество всех невырожденных матриц n–го порядка с вещественными элементами, а групповой операцией является операция умножения матриц. Образует ли множество G с указанной операцией группу?

12*. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени, не превосходящей 2, введено скалярное произведение формулой

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Построить ортонормированный базис в этом евклидовом пространстве.

13*. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис в унитарном пространстве E_2. Линейный оператор $\widehat{A}$, действующий в этом пространстве, имеет в базисе $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$ матрицу

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного оператора $\widehat{A}^*$ в базисе f_1, f_2.

14*. Дважды ковариантный тензор имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства R_n координаты $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Как преобразуются координаты этого тензора при переходе к другому базису?

15*. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $x_1x_2 + x_1x_3$ к каноническому виду.

Теория функций комплексного переменного

1. Вычислить: $|\cos(1+i)|$.

2. Вычислить: $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$.

3. Решить уравнение: $e^z = i$.

4. Решить уравнение: $z^3 = 8$.

5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$ в кольце $1 < |z| < +\infty$.

6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ в кольце $0 < |z| < 1$.

7. Найти все особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3}$ и определить их тип.

8. Найти все особые точки функции $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$ и определить их тип.

9. Вычислить: $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz.$

10. Вычислить: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)}.$

11. Найти функцию, конформно отображающую правую полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$.

12. Найти функцию, конформно отображающую внешность круга $|z-i| > 1$ в круг $|z-1| < 1$.

Дифференциальные уравнения

1. Решить уравнение:

а) $2xy' = 1 - y^2$; б) $xy'' = y'$; в) $y'' - 2y' + y = 0$; г) $y'' + 3y' + 2y = 1$;

д) $y^{(4)} - y = 0$; е) $y'' + y = 4xe^x$; ж) $y'' + y = 4\sin x$.

2. Решить систему уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

3. Методом функции Грина решить краевую задачу:

$$y'' + y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

4. Найти общее решение уравнения:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

5. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

проходящую через кривую

$$y = 1, \quad z = x^2.$$

Методы математической физики

1. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

на отрезке $0 \le x \le l$ с граничными условиями $\quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$

2. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$y'' + \lambda y = 0$$

на отрезке $0 \le x \le l$ с граничными условиями $\quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$

3. Найти собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ с граничным условием Дирихле.

4. Найти собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в шаре $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ с граничным условием Неймана.

5. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри круга $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ с граничным условием $u(a, \varphi) = 1 + \sin^2 \varphi$.

6. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа вне шара $r \ge a$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ с граничным условием $u(a, \theta, \varphi) = \cos\theta + 1$.

7. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке $0 \le x \le l$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

8. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний в круге $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u, \quad u(a,\varphi,t) = \sin\varphi, \quad u(r,\varphi,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\varphi,0) = 0.$$

9. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в круге $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a,\varphi,t) = 0, \quad u(r,\varphi,0) = 0.$$

10. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в шаре $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u, \quad u(a,\theta,\varphi,t) = t, \quad u(r,\theta,\varphi,0) = 0.$$

11. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \operatorname{sgn} x.$$

12. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на полупрямой $0 \le x < \infty$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = \sin t.$$