МЕХАНИКА

Задача 1.

Тело брошено с поверхности земли под углом α к горизонту со скоростью V_0. Каков максимальный радиус кривизны его траектории во время полета? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g.

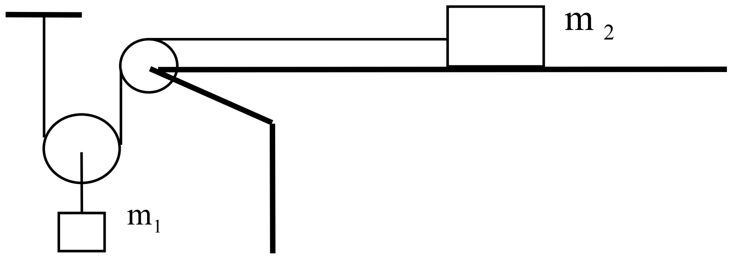
Ответ: $R_{max} = \dfrac{V_0^2}{g\cos\alpha}$.

Задача 2.

Материальная точка движется по плоскости, начиная с момента времени t = 0, по закону: $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$. Найти ускорение точки в момент первого пересечения ею оси Y.

Ответ: $\vec{w} = -\omega^2 b\,\vec{j}$, где $\vec{j}$ - единичный вектор вдоль оси Y.

Задача 3.

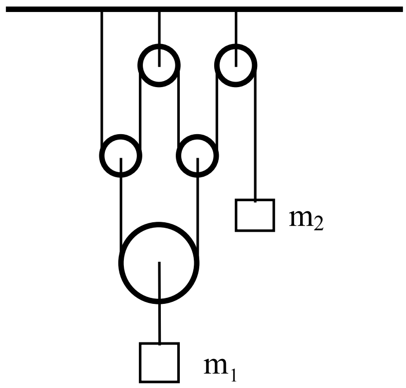


В системе, изображенной на рисунке, массы тел равны m_1 и m_2. трения нет, массы блоков и нити пренебрежимо малы, участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны. Найти ускорение тела m_1. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: $a_1 = \dfrac{m_1 g}{m_1 + 4m_2}$

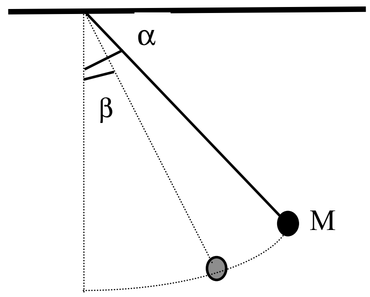
Задача 4.

Найти ускорение массы m_1 в системе, изображенной на рисунке. Нити невесомы и нерастяжимы, блоки невесомы, трение в осях блоков и о воздух отсутствует. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ: $a_1 = g\dfrac{m_1 - 4m_2}{m_1 + 16m_2}$.

Задача 5.

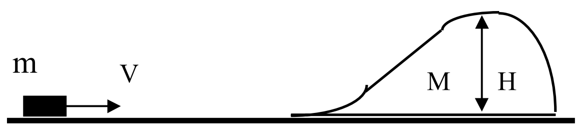


Маятник, состоящий из маленького груза массы M, висящего на невесомой нерастяжимой нити, отклоняют на угол α от положения равновесия и отпускают. Найти натяжение нити в тот момент, когда нить отклонена от положения равновесия на угол $\beta < \alpha$. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ: $T = Mg\,(3\cos\beta - 2\cos\alpha)$.

Задача 6.

На гладкой горизонтальной плоскости лежит небольшая шайба массы m и гладкая горка массы M и высоты H. Какую минимальную скорость V надо сообщить шайбе, чтобы она смогла преодолеть горку?



Ответ: $V = \sqrt{2gH\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$.

Задача 7.

Два шарика с массами m_1 и m_2, движущиеся вдоль одной прямой со скоростями V_1 и V_2, испытывают упругое столкновение. Найти максимальное значение энергии упругой деформации шариков во время этого столкновения.

Ответ: $W = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}(V_1 - V_2)^2$.

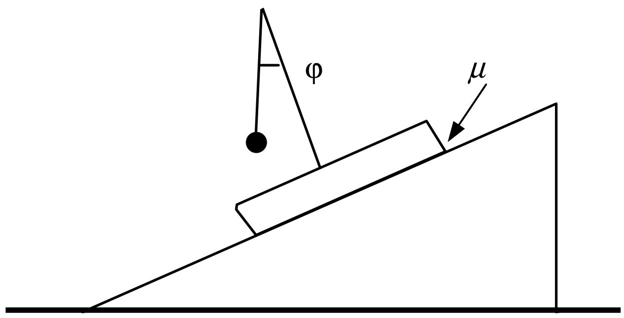
Задача 8.

Ракета массы M, находящаяся в космосе вдали от других тел, начинает ускоряться, выбрасывая из двигателя с относительной скоростью U газы массой μ в единицу времени. Через сколько времени ракета достигнет скорости V?

Ответ: $t = \frac{M}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{V}{U}}\right)$.

Задача 9.

На тяжелой пластинке, соскальзывающей с наклонной плоскости, установлен отвес. Коэффициент трения между пластинкой и плоскостью равен μ. Определить угол отклонения φ нити отвеса от перпендикуляра к плоскости пластинки при установившемся движении?



Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = \mu$.

Задача 10.
Однородный стержень длины L равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр. Какова должна быть угловая скорость его вращения ω, чтобы стержень разорвался? Максимальная сила натяжения, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, при которой стержень еще не разрывается, равна T, плотность материала стержня – ρ.

Ответ: $\omega > \frac{2}{L}\sqrt{\frac{2T}{\rho}}$.

Задача 11.
Два стержня одинаковой собственной длины ℓ_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одной и той же скоростью V относительно лабораторной системы отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

Ответ: $\ell' = \ell_0\sqrt{1 - 4V^2/c^2(1+V^2/c^2)} = \ell_0\,\frac{1 - V^2/c^2}{1+V^2/c^2}$.

Задача 12.
Система отсчета K' движется в положительном направлении оси x системы K со скоростью V, причем оси x и x' совпадают. В момент совпадения начал координат O и O' показания часов обеих систем в этих точках совпадают и равны нулю. Найти в системе K скорость перемещения точки, в которой показания часов обеих систем будут все время одинаковы.

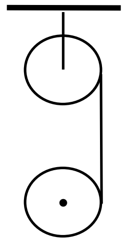
Ответ: $\dot{x} = \frac{c^2}{V}(1 - \sqrt{1 - V^2/c^2})$.

Задача 13.

На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы M и на ней - однородный шар массы m. К доске приложили постоянную горизонтальную силу F. С какими ускорениями будут двигаться доска и центр шара в отсутствие скольжения между ними?

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{F}{M + \frac{2}{7}m}, \ a_2 = \frac{F}{\frac{7}{2}M + m}.$$

Задача 14.



Установка состоит из двух одинаковых сплошных однородных цилиндров, на которые симметрично намотаны две легкие нерастяжимые нити (см. рис.). Найти линейное ускорение нижнего цилиндра, если ускорение свободного падения равно g, а трением можно пренебречь.

$$\text{Ответ: } a = \frac{4}{5}g.$$

Задача 15.

Гладкий однородный стержень AB массы M и длины L свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной оси, проходящей через его конец A . Из точки A начинает скользить небольшая муфта массы m. Найти скорость муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B.

$$\text{Ответ: } V_{otn'} = \omega_0 L \sqrt{\frac{M}{M + 3m}}.$$

Задача 16.

Однородный упругий прямоугольный брусок движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F, направленной вдоль бруска и равномерно распределенной по его торцу. Площадь торца равна S, модуль Юнга материала - E. Найти относительную деформацию бруска в направлении действия данной силы.

$$\text{Ответ: } \varepsilon = \frac{\delta L}{L} = \frac{F}{2ES}.$$

Задача 17.

Проволока длиной L натянута горизонтально между двумя зажимами. К середине проволоки подвешен груз весом P, в результате чего возник прогиб λ. Определить зависимость λ от P, если известны модуль Юнга материала проволоки E и ее диаметр d. Считать начальное натяжение проволоки малым, $\lambda/L \ll 1$.

Ответ: $\lambda = L\sqrt[3]{\dfrac{P}{2\pi d^2 E}}$.

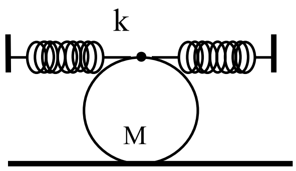
Задача 18.
Какую работу необходимо совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень, выдавить из горизонтально расположенного цилиндра через отверстие на его торце всю воду за время t? Начальный объем воды в цилиндре равен V, площадь сечения отверстия s много меньше площади поршня. Трение и вязкость пренебрежимо малы.

Ответ: $A = F\dfrac{V}{S} = \dfrac{\rho V^3}{2 s^2 t^2}$.

Задача 19.
Свинцовый шарик равномерно падает в глицерине, вязкость которого равна η = 1,39 Па·с. При каком максимальном диаметре шарика d его обтекание еще остается ламинарным, если известно, что переход к турбулентному обтеканию соответствует числу Рейнольдса Re = 0,5 (за характерный размер в этом числе взят d)? Плотность глицерина ρ_1 = 1,26 г/см^3, плотность свинца ρ_2 = 11,3 г/см^3, ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Ответ: $d = \sqrt[3]{\dfrac{18\eta^2 Re}{g\rho_1(\rho_2 - \rho_1)}} \approx 5$ мм.

Задача 20.
Сплошной однородный цилиндр массы M совершает малые колебания под действием двух пружин, общий коэффициент жесткости которых равен k (см. рис.). Найти период этих колебаний в отсутствие проскальзывания.



Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(3/4)MR^2}{2kR^2}} = \pi\sqrt{\dfrac{3M}{2k}}$.

Задача 21.
Найти логарифмический декремент затухания математического маятника длины L = 50 см, если за промежуток времени t = 5 мин. его полная механическая энергия уменьшилась в n = $4 \cdot 10^4$ раз. Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

$$\text{Ответ: } \theta = \frac{\pi \ln n}{t}\sqrt{\frac{L}{g}} \approx 0{,}025.$$

Задача 22.

При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найти резонансную частоту ω_0.

$$\text{Ответ: } \omega_0 = \sqrt{\omega_1\,\omega_2}\,.$$

Задача 23.

На пути плоской звуковой волны, распространяющейся в воздухе (плотность ρ = 1,3 кг/м^3), находится шар радиусом R = 50 см. Длина волны звука λ =20 см, частота ν = 1700 Гц, амплитуда колебаний давления Δp =3,5 Па. Найти средний за период колебания поток энергии, падающий на шар.

$$\text{Ответ: } \langle I \rangle = \pi R^2 \,\frac{\Delta p^2}{2\rho\lambda\nu} \approx 1{,}1\cdot 10^{-2} \text{ Вт.}$$

Задача 24.

Неподвижный наблюдатель воспринимает звук от двух камертонов, один из которых приближается, а другой с той же скоростью удаляется. При этом наблюдатель слышит биения с частотой ν = 2 Гц. Найти скорость каждого камертона, если частота их колебаний ν_0 = 680 Гц и скорость звука c = 340 м/с.

$$\text{Ответ: } \nu = \nu_1 - \nu_2 = \nu_0\left(\frac{1}{1 - V/c} - \frac{1}{1 + V/c}\right) \approx \nu_0(1 + V/c - 1 + V/c) = \frac{2\nu_0 V}{c}, \text{ и}$$

$$V \approx \frac{c\nu}{2\nu_0} = 0{,}5 \text{ м/с.}$$

Задача 25.

Струна массы M закреплена с обоих концов. В ней возбудили колебания основного тона с круговой частотой ω и максимальной амплитудой смещения A_0. Найти максимальную кинетическую энергию струны.

$$\text{Ответ: } E_{max} = \frac{MA_0^2\omega^2}{4}\,.$$