Задачи по молекулярной физике

1. Идеальный газ находится в сосуде достаточно большого объема при температуре $t = 27^0C$ и давлении $P = 1$ атм. Оценить среднеквадратичное отклонение σ_m числа молекул от среднего значения $\langle m\rangle$ в малом объеме $v = 1$ см^3, а также относительную флуктуацию числа молекул газа в этом объеме, т.е. отношение среднеквадратичного отклонения числа молекул от среднего значения к среднему значению $\sigma_m/\langle m\rangle$.

Ответ: $\sigma_m = \left(\dfrac{Pv}{kT}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}5\cdot10^{10}$, $\sigma_m/\langle m\rangle = [Pv/(kT)]^{-1/2} \approx 2\cdot10^{-10}$.

2. Испускание электронов нитью накала, находящейся в вакуумной трубке, происходит очень редко, случайным образом, причем среднее число электронов, испущенных за одну секунду, равно ν[1/c]. Поделив время наблюдения τ на большое число N столь малых интервалов времени, чтобы вероятность испускания нитью электрона за это время была много меньше единицы, определить средний полный заряд $\langle Q\rangle$, испущенный нитью за время τ, и дисперсию заряда $\sigma_{\mathbf{Q}}^2$, считая, что N интервалов представляют собой статистическую систему независимых идентичных элементов.

Ответ: $\langle \mathbf{Q}\rangle = \sigma_Q^2 = e\nu\tau$.

3. Температура гелия (молярная масса $\mu = 4$ г/моль), распределение молекул которого по скоростям можно считать максвелловским, изменилась от $T_1 = 200$ К до $T_2 = 400$ К. Число молекул, скорости которых лежат в узком интервале скоростей от V до $V + \Delta V$, осталось прежним. Определить скорость этих молекул.

Ответ: $V = \sqrt{\dfrac{3RT_1T_2 \ln\left(T_2/T_1\right)}{\mu(T_2 - T_1)}} \approx 1300$ м/с.

4. Полагая распределение молекул азота (молярная масса $\mu = 28$ г/моль) по скоростям максвелловским, рассчитать наивероятнейшую скорость поступательного движения одной молекулы и среднюю полную энергию всех молекул, занимающих при давлении $P = 2\cdot10^5$ Па и температуре $t = 27^0C$ объем $V = 30$ литров.

Ответ: $V_H = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}} \approx 420$ м/с, $\langle \mathbf{E}\rangle = \dfrac{5\mathbf{PV}}{2} \approx 1{,}5\cdot10^4$ Дж.

5. Идеальный газ (гелий), имеющий температуру T, находится внутри цилиндра высоты H и радиуса r_0. Газ вместе с цилиндром вращается вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω. Во сколько раз концентрация молекул у стенок цилиндра превосходит их концентрацию на расстоянии $r = r_0/2$ от оси цилиндра?

$$\text{Ответ: } \frac{n(r_0)}{n\left(r_0/2\right)} = \exp\left(\frac{3\mu\omega^2 r_0{}^2}{8RT}\right).$$

6. Оценить радиус r мелких шарообразных частичек вещества, взвешенных в жидкости, если при увеличении высоты на $h = 13\cdot10^{-3}$ мм концентрация частичек вещества уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Температура жидкости $t = 27^0$C, плотность жидкости $\rho_1 = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, плотность вещества частичек $\rho_2 = 1{,}2\cdot10^3$ кг/м^3.

$$\text{Ответ: } r = \left(\frac{3kT \ \ \ell n\alpha}{4\pi(\rho_2 - \rho_1)gh}\right)^{1/3} \approx 2{,}6\cdot10^{-7}\text{ м.}$$

7. Сосуд, содержащий одноатомный идеальный газ (молярная масса $\mu = 4$ г/моль), движется со скоростью $U = 100$ км/час. Оценить, насколько возрастут средний квадрат скорости теплового движения атомов и температура газа при остановке сосуда. Теплоемкостью и теплопроводностью стенок сосуда можно пренебречь.

$$\text{Ответ: } \Delta\langle V^2\rangle = U^2,\ \ \Delta T = \frac{\mu U^2}{3R} \approx 0{,}1\text{ K.}$$

8. На невесомой нерастяжимой нити длины $l = 3$ см подвешен маленький шарик массы $m = 0{,}03$ г так, что получившийся маятник может совершать колебания в одной вертикальной плоскости. Рассматривая маятник как броуновскую частицу, имеющую одну степень свободы и находящуюся в воздухе при комнатной температуре $T = 27^0$ K, оценить среднеквадратичное угловое флуктуационное отклонение $\sqrt{\langle\varphi^2\rangle}$ маятника.

$$\text{Ответ: } \sqrt{\langle\varphi^2\rangle} = \sqrt{\frac{kT}{mgl}} \approx 2{,}2\cdot10^{-8}\text{ рад.}$$

9. Пространство между двумя очень длинными коаксиальными цилиндрами с радиусами $R_1 < R_2$ заполнено идеальным газом, коэффициент теплопроводности которого равен λ. Стационарный процесс теплопроводности между цилиндрами осуществляется благодаря тому, что температуры ци-

линдров поддерживаются постоянными и равными для внутреннего и внешнего цилиндров, соответственно, $T(R_1)=T_1$ и $T(R_2)=T_2$, причем $T_1 > T_2$. Считая, что конвекция отсутствует и длина свободного пробега много меньше зазора между цилиндрами, найти зависимость температуры T от расстояния r - от оси цилиндров ($R_1 \le r \le R_2$) и количество теплоты q_0, передаваемое газу в единицу времени с единицы длины внутреннего цилиндра.

$$\text{Ответ: } q_0 = \frac{2\pi\lambda(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

10. Металлический чайник с водой нагревается на газовой плите. Вода кипит и образуется пар с постоянной скоростью выделения $\mu = 3{,}3\cdot10^{-2}$ г/с. Удельная теплота парообразования воды равна $L = 2{,}25\cdot10^{6}$ Дж/кг. Дно чайника площадью $S = 0{,}03$ м^2 покрыто накипью толщиной $l = 1$ мм. Коэффициент теплопроводности накипи $\lambda = 1{,}25$ Дж/(с·м·град). Считая теплопроводность металла, из которого изготовлен чайник, значительно больше теплопроводности накипи, оценить разность ΔT температур между наружной поверхностью дна чайника и поверхностью накипи, контактирующей с водой.

$$\text{Ответ: } \Delta T = \frac{\mu L}{\lambda S} l \approx 2\ \text{K}.$$

11. В сосуде при комнатной температуре находится смесь идеальных газов: $m_1 = 4$ кг одноатомного неона и $m_2 = 1$ кг двухатомного водорода. Определить удельную теплоемкость смеси в изохорическом процессе C_{Vm}. Молярные массы неона и водорода равны, соответственно, $\mu_1 = 20$ г/моль, $\mu_2 = 2$ г/моль.

Ответ:

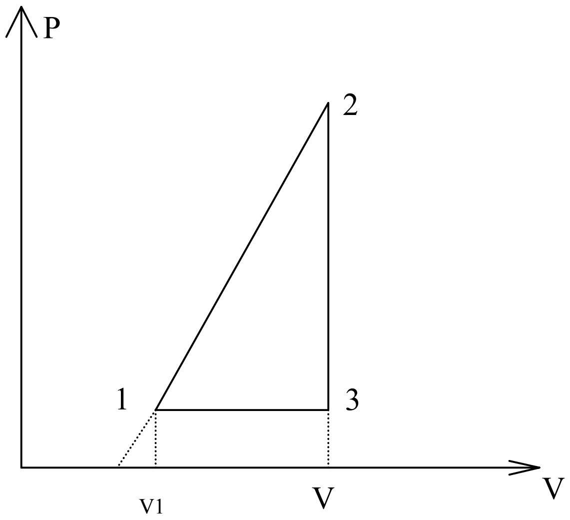
$$\mathbf{C_{Vm}} = \frac{\mathbf{R}}{2(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)}\left(3\frac{\mathbf{m}_1}{\mu_1} + 5\frac{\mathbf{m}_2}{\mu_2}\right) \approx 0{,}31\cdot\mathbf{R}\cdot10^3 \cong 2{,}6\ \text{kДж/(кг·К)}.$$

12. Квазистатическое расширение идеального газа происходит по закону $V = aP^{-1/2}$, где $a = \text{const}$. Определить молярную теплоемкость газа в этом процессе, если его молярная теплоемкость при изохорическом процессе известна и равна C_v.

$$\text{Ответ: } C_\alpha = C_V - R.$$

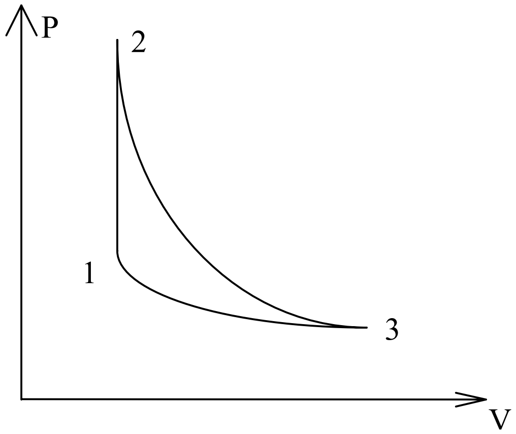
13. Идеальный газ находится в сосуде объемом V_1 под давлением P_1. Затем газ сжимают до объема $V_2 = V_1/2$ так, что его давление изменяется по закону $P \sim 1/V^2$. Определить работу газа в этом процессе.

Ответ: $A_{12} = -P_1V_1$.



14. Определить коэффициент полезного действия η тепловой машины, использующей в качестве рабочего тела идеальный одноатомный газ и работающей по обратимому циклу, представленному на рисунке. Объемы и отношение температур в 1-ом и 2-ом состояниях равны, соответственно, $V_1 = 5$ литров, $V_2 = 10$ литров, $T_2/T_1 = \alpha = 2{,}5$.

Ответ: $\eta = \dfrac{(\alpha V_1 - V_2)(V_2 - V_1)}{3V_1V_2(\alpha - 1) + (\alpha V_1 + V_2)(V_2 - V_1)} \approx 0{,}04$.



15. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изохоры 12, адиабаты 23 и изотермы 31 (см. рис). Определить коэффициент полезного действия η данной машины, как функцию максимальной T_2 и минимальной T_1 температур, достигаемых в этом цикле.

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{T_1 \, ln\left({T_2}/{T_1} \right)}{T_2 - T_1}$.

16. Идеальный газ в количестве $\nu = 2$ моля изотермически сжимают от объема V_1 до объема $V_2 = V_1/2$. Найти изменение энтропии газа в этом процессе.

Ответ: $\Delta S_{12} = \nu R \, ln \dfrac{V_2}{V_1} = 2R \, ln2$.

17. Теплоизолированный цилиндр разделен на две секции объемом V_0 каждая невесомым поршнем, который может передвигаться без трения. Первоначально поршень закреплен, в одной секции цилиндра находится 1 моль идеального газа, а другая пуста. Затем поршень получает возможность свободно перемещаться, и происходит самопроизвольное необратимое расширение газа. Определить изменение температуры и энтропии после установления равновесного состояния.

Ответ: $\Delta T=0$, $\Delta S_{12} = R\,ln\dfrac{V_2}{V_1} = R\,ln2$.

18. Насыщающие пары находятся в термодинамическом равновесии с жидкостью при температуре T_0 и давлении P_0. Найти зависимость давления от температуры в достаточно узком интервале температур. В этой области температур можно считать, что молярная скрытая теплота испарения L не зависит от температуры, и молярный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с молярным объемом пара.

Ответ: $P(T) = P_0 exp\left[\dfrac{L}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right)\right]$.

19. Оценить изменение температуры плавления льда ΔT при повышении давления на $\Delta P = 1$атм. В исходном состоянии ($P = 1$ атм., $t = 0^0C$) известны: удельная теплота плавления льда $L = 335$ Дж/г, удельный объем льда $v_2 = 1{,}091$ см^3/г, удельный объем воды $v_1 = 1{,}000$ см^3/г.

Ответ: $\Delta T = \left(\dfrac{T(v_2 - v_1)}{L}\right)_0 \Delta P \cong 7{,}5 \cdot 10^{-3}\,K$.

20. Одинаковое количество молей $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 50$ молей водорода и кислорода находятся в разных сосудах, имеющих одинаковые объемы $V_1 = V_2 = V = 20$ литров. Оба газа подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса, в котором постоянные a для водорода и кислорода равны, соответственно, $a_1(H_2) = 0{,}024$ [м^6·Па/моль^2], $a_2(O_2) = 0{,}14$[м^6·Па/моль^2], а постоянные b можно считать одинаковыми $b_1 = b_2$. Определить, насколько будут отличаться давления на стенки сосудов, содержащих водород и кислород.

Ответ: $\Delta P = \dfrac{\nu^2}{V^2}(a_2 - a_1) \approx 7{,}2 \cdot 10^5$ Па.

21. Два сосуда с объемами $V_1 = 1$ литр и $V_2 = 2V_1$ соединены трубкой малого объема с закрытым краном. В каждом сосуде находится по одному

молю ($\nu = 1$ молю) одного и того же газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса. Определить насколько изменится температура газа после открытия крана и установления термодинамического равновесия, если до открытия крана температура газа в обоих сосудах была одинакова. Теплоемкостью и теплопроводностью стенок сосудов и соединяющей их трубки можно пренебречь. Молярную теплоемкость газа при изохорическом процессе считать постоянной и равной $C_v = 2{,}5R$. Постоянная Ван-дер-Ваальса, учитывающая силы притяжения между молекулами газа, равна $a = 0{,}24[м^6 \cdot Па/моль^2]$.

$$\text{Ответ: } \Delta T = -\frac{a(V_2 - V_1)^2}{2C_V V_1 V_2 (V_1 + V_2)} \approx -1\text{К}.$$

22. Две вертикальные параллельные друг другу стеклянные пластины частично погружены в спирт, коэффициент поверхностного натяжения которого равен $\sigma = 0{,}022$ Н/м, плотность - $\rho = 0{,}79$ г/см^3. Расстояние между пластинами $d = 0{,}2$ мм, ширина их $l = 20$ см. Оценить, на какую высоту h относительно поверхности спирта в сосуде поднимется спирт между пластинами и какую силу f надо приложить к каждой из пластин, чтобы не допустить их сближения. Считать, что смачивание полное и что спирт между пластинами не доходит до их верхних краев.

$$\text{Ответ: } h = \frac{2\sigma}{\rho g d} \approx 2{,}8\,\text{см},\ f = \frac{2l\sigma^2}{\rho g d^2} = 0{,}6\ \text{Н}.$$

23. Капилляр с запаянным верхним концом, внутренним радиусом $r = 0{,}44$ мкм и длиной $l = 30$ см вертикально опускают в широкий сосуд с жидкостью так, что этот капилляр оказывается погруженным на половину своей длины. При этом жидкость поднимается в капилляре на высоту $h = l/4$ над ее уровнем в сосуде. Жидкость полностью смачивает стенки капилляра, ее плотность равна $\rho = 1{,}26$ г/см^3. Атмосферное давление $P_A = 10^5$ Па. Определить коэффициент поверхностного натяжения σ жидкости.

Ответ: $\sigma = r(12P_A + \rho g l)/8 = 0{,}066$ Н/м.