Задачи по теоретической механике

Задача N 1

Точка движется по поверхности сферы радиуса R таким образом, что угол между ее скоростью и меридианом является постоянным и равен α. Найти траекторию точки в сферических координатах.

Задача N 2

Найти закон движения частицы массы m в поле

$$U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4, \quad a,\ b > 0\ ,$$

если в начальный момент времени t_0 $x(t_0) = -\sqrt{2a/b}$, а $\dot{x}(t_0) = 0$.

Задача N 3

Найти время задержки при движении частицы массы m от $x = -\infty$ до $x = \infty$ в поле

$$U(x) = U_0/\mathrm{ch}^2 ax, \quad U_0 > 0\ ,$$

по сравнению со временем движения частицы в тех же пределах той же энергии $E > U_0$, но в отсутствие внешнего поля. Рассмотреть также случай $E \to U_0$.

Задача N 4

Частица массы m движется по сфере радиуса R в поле силы тяжести. Найти интегралы движения и закон движения (в квадратурах).

Задача N 5

Найти время падения частицы массы m в центр поля

$$U(r) = -b/r^2, \quad b > 0 \ ,$$

с расстояния R, при условии $L_0^2/2m < b$, $E_0 > 0$.

Задача N 6

Найти траекторию (и угловое расстояние между двумя последовательными прохождениями точек r_{min}) частицы массы m в центральном поле

$$U(r) = -a/r - b/r^2, \quad a, \ b > 0 \ ,$$

при условии $L_0^2/2m > b$, $E_0 < 0$.

Задача N 7

Найти сечение рассеяния для частиц массы m, движущихся в потенциале $U(r) = \alpha/r^2$ с энергией E при $\alpha > 0$.

Задача N 8

Найти сечение падения на центр для частиц массы m, движущихся в потенциале

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^4}$$

с энергией E.

Задача N 9

Стержень массы m и длины l скользит по сторонам прямого угла без трения. Написать функцию Лагранжа и найти закон движения в квадратурах.

Задача N 10

Стержень массы m и длины l может двигаться в вертикальной плоскости (присутствует сила тяжести). Один из концов стержня скользит по горизонтальной прямой. Записать функцию Лагранжа и найти закон движения в квадратурах.

Задача N 11

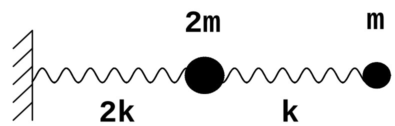
Найти кинетическую энергию однородного конуса с углом раствора 2α и высотой h, катящегося без проскальзывания по плоскости, если известны моменты инерции относительно главных осей I_1 и I_3 и масса конуса m.

Задача N 12

Однородный цилиндр массы M и радиуса R на расстоянии а от оси, параллельно ей, проткнут тонким однородным стержнем массы m. Цилиндр перекатывается без проскальзывания в горизонтальной плоскости. Найти частоту малых колебаний вблизи положения равновесия.

Задача N 13

Найти закон малых колебаний системы, изображенной на рисунке, если в начальный момент времени пружины не растянуты, а скорости частиц массы m и $2m$ равны v_1 и v_2 соответственно. Считать, что пружины не изгибаются, а поле тяжести отсутствует.

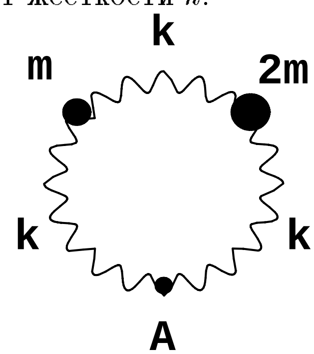


Задача N 14

Три бусины с массами m, m, $2m$ нанизаны на гладкую прямолинейную струну. Бусины скреплены пружинами с коэффициентами жесткости k и $2k$ и одинаковыми длинами l в недеформированном состоянии. Найти нормальные колебания системы.

Задача N 15

Найти собственные частоты и вынужденные колебания системы, показанной на рисунке, если точка A совершает колебательное движение по закону $\alpha(t) = a\cos(\gamma t)$. Частицы могут двигаться только по окружности радиуса R, поле тяжести отсутствует. Все пружины одинаковы и имеют коэффициент жесткости k.



Задача N 16

Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$ (в калибровке векторного потенциала $\mathbf{A} = (0, xH, 0)$) и гравитационном поле $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Указать первые интегралы уравнений Лагранжа. Найти закон движения заряда, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ радиус вектор частицы $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, а вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$.

Задача N 17

Частица с массой m и зарядом e может двигаться по поверхности конуса с углом при вершине 2α, по оси которого направлено постоянное и однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Ось конуса вертикальна, поле тяжести присутствует. Записать функцию Лагранжа в цилиндрических координатах и найти закон движения в квадратурах.

Задача N 18

Частица массы m и зарядом e движется в магнитном поле $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$ и поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ по поверхности параболоида $az = x^2 + y^2$. Записать функцию Гамильтона в цилиндрических координатах, указать интегралы движения и найти закон движения в квадратурах.

Задача N 19

Частица массы m и зарядом e движется по поверхности вертикального конуса с углом при вершине 2α в поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. В вершине конуса закреплен заряд Q. Записать функцию Гамильтона, указать интегралы движения и найти закон движения.

Задача N 20

Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m, находящегося внутри гладкой (прямой) трубки исчезающе малого радиуса, наклоненной к вертикальной оси, проходящей через трубку, под углом α, и вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Вдоль оси вращения действуют поле тяжести $\mathbf{g}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$. Найти первый интеграл уравнений Лагранжа.

Задача N 21

Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m, находящегося внутри гладкой трубки исчезающе малого радиуса, изогнутой в форме эллипса с полуосями a и b. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси эллипса. Вдоль оси вращения действует поле тяжести $\mathbf{g}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$. Найти первый интеграл уравнений Лагранжа.

Задача N 22

Составить функцию и уравнения Лагранжа заряда e массы m, находящегося внутри гладкой трубки исчезающе малого радиуса, изогнутой в форме окружности радиуса R. Трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг диаметра окружности. Вдоль оси вращения действует поле тяжести $\mathbf{g}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$. Найти первый интеграл уравнений Лагранжа.

Задача N 23

Вычислить скобки Пуассона $[v_i, v_j]$, где v_i - декартовы компоненты вектора скорости заряда e, массы m в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$.

Задача N 24

Вычислить скобки Пуассона $[(\mathbf{rp}), \mathbf{L}]$, где $(\mathbf{rp})$–скалярное произведение радиус-вектора и вектора импульса, а $\mathbf{L}$– вектор момента импульса частицы.

Задача N 25

Убедиться, что преобразование

$$Q = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}; \qquad P = i\frac{m\omega q - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}$$

является каноническим и найти его производящую функцию. Для системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

построить новую функцию Гамильтона и записать уравнения Гамильтона в переменных Q и P.

Задача N 26

Частица массы m движется в центральном поле $U(r)$. С помощью уравнения Гамильтона-Якоби в сферических координатах найти ее траекторию и закон движения (в квадратурах).

Задача N 27

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{a\ \cos\varphi}{\rho^2}$$

Найти закон движения (в квадратурах) методом Гамильтона-Якоби. (a - некоторая постоянная)

Задача N 28

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - a\cos\theta\dot{\varphi}$$

Найти закон движения (в квадратурах) методом Гамильтона-Якоби.

Задача N 29

Найти траекторию и закон движения заряда e, массы m в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$ (в декартовых координатах) с помощью уравнения Гамильтона-Якоби.

Задача N 30

Как изменяется механическая энергия системы, описываемой лагранжианом

$$L = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2 - k(x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2)/2,$$

где $m, k > 0$ при адиабатическом изменении параметра k.

Задача N 31

Математический маятник совершает колебания в плоскости, расположенной под углом α к вертикали. Определить как будут меняться амплитуда колебаний при медленном изменении угла α.

Задача N 32

Как изменяется энергия частицы с массой m и зарядом e в центральном поле $U(r)$ при медленном (адиабатическом) включении слабого однородного магнитного поля напряженности H.